

Задача 1. (Основная волна, 2026)

УСЛОВИЕ

а) Решите уравнение $2 \cos \left(x - \frac{\pi}{3} \right) + 2 \sin \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = 0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-2\pi; -\frac{\pi}{2} \right]$.

РЕШЕНИЕ

а) Воспользуемся формулой косинуса разности и формулой приведения:

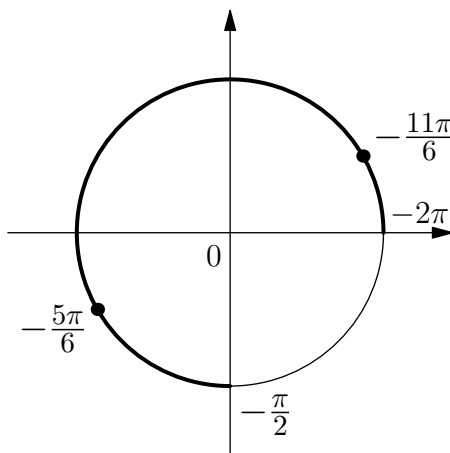
$$2 \left(\cos x \cos \frac{\pi}{3} + \sin x \sin \frac{\pi}{3} \right) - 2 \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos x + \sqrt{3} \sin x - 2 \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{3} \sin x - \cos x = 0.$$

Разделим обе части уравнения на $\cos x \neq 0$:

$$\sqrt{3} \operatorname{tg} x - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни с помощью тригонометрической окружности.



Получим:

$$x_1 = -2\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{11\pi}{6},$$

$$x_2 = -\pi + \frac{\pi}{6} = -\frac{5\pi}{6}.$$

ОТВЕТ: а) $\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{11\pi}{6}, -\frac{5\pi}{6}$.

Задача 2. (Основная волна, 2026)

УСЛОВИЕ

а) Решите уравнение $2 \sin \left(x - \frac{\pi}{6} \right) - 2\sqrt{3} \cos \left(\frac{\pi}{2} - x \right) = 0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-6\pi; -\frac{9\pi}{2} \right]$.

РЕШЕНИЕ

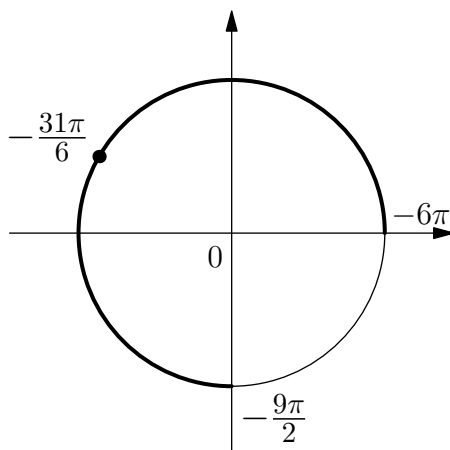
а) Перейдем к равносильному уравнению и решим его:

$$2 \left(\sin x \cos \frac{\pi}{6} - \cos x \sin \frac{\pi}{6} \right) - 2\sqrt{3} \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \sin x - \cos x - 2\sqrt{3} \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -\sqrt{3} \sin x - \cos x = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3} \operatorname{tg} x + 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{tg} x = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Leftrightarrow \quad x = -\frac{\pi}{6} + \pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни с помощью тригонометрической окружности.



Получаем $x_1 = -5\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{31\pi}{6}$.

ОТВЕТ: а) $-\frac{\pi}{6} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{31\pi}{6}$.

Задача 3. (Досрочная волна, 2026)

УСЛОВИЕ

а) Решите уравнение $\sin^2 x + \cos^2 \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\frac{13\pi}{2}; \frac{15\pi}{2}\right]$.

РЕШЕНИЕ

Воспользуемся формулой косинуса суммы:

$$\begin{aligned} \sin^2 x + \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} - \sin x \sin \frac{\pi}{4}\right)^2 &= \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x + \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x\right)^2 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \sin^2 x + \frac{1}{2} \cos^2 x - \sin x \cos x + \frac{1}{2} \sin^2 x &= \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

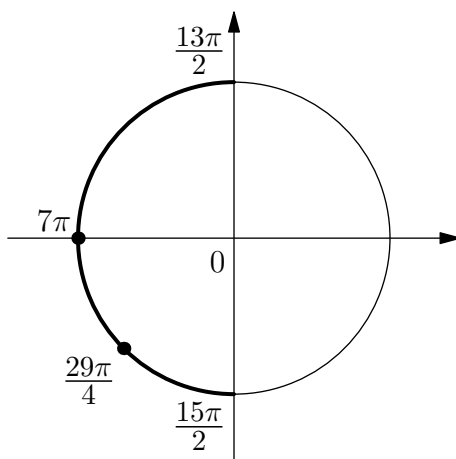
Воспользуемся основным тригонометрическим тождеством и приведем подобные слагаемые:

$$\sin^2 x - \sin x \cos x + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin^2 x - \sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \sin x (\sin x - \cos x) = 0.$$

Перейдем к равносильной совокупности и решим ее:

$$\begin{cases} \sin x = 0, \\ \sin x - \cos x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x = 0, \\ \operatorname{tg} x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi k, \\ x = \frac{\pi}{4} + \pi k, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни с помощью тригонометрической окружности.



Получим:

$$x_1 = \frac{13\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 7\pi,$$

$$x_2 = 7\pi + \frac{\pi}{4} = \frac{29\pi}{4}.$$

ОТВЕТ: а) $\pi k, \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; б) $7\pi, \frac{29\pi}{4}$.

Задача 4. (Резервный день, 2026)

УСЛОВИЕ

а) Решите уравнение $7^{2\cos x} = 49^{\sin 2x}$.б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[\pi, \frac{5\pi}{2}\right]$.

РЕШЕНИЕ

а) Перейдем к одному основанию:

$$7^{2\cos x} = 49^{\sin 2x} \Leftrightarrow 49^{\cos x} = 49^{\sin 2x} \Leftrightarrow \cos x = \sin 2x.$$

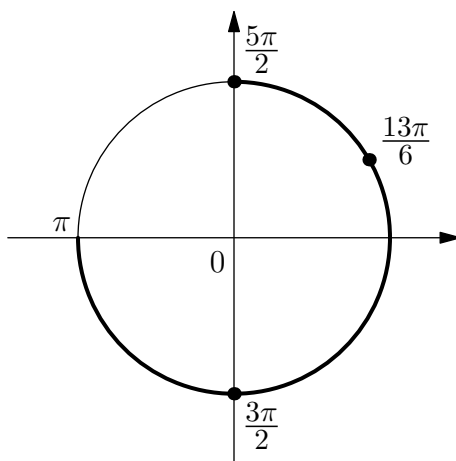
Разложим синус двойного аргумента и вынесем $\cos x$ за скобки:

$$\cos x - 2\sin x \cos x = 0 \Leftrightarrow \cos x(1 - 2\sin x) = 0.$$

Перейдем к равносильной совокупности и решим ее:

$$\begin{cases} \cos x = 0, \\ \sin x = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \\ x = \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \\ x = \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) Отберем корни с помощью тригонометрической окружности.



Получим:

$$x_1 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2},$$

$$x_2 = 2\pi + \frac{\pi}{6} = \frac{13\pi}{6},$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{2}.$$

ОТВЕТ: а) $\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{6} + 2\pi n, \frac{5\pi}{6} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z};$ б) $\frac{3\pi}{2}, \frac{13\pi}{6}, \frac{5\pi}{2}.$

Задача 5. (Пересдача, 2026)

УСЛОВИЕ

а) Решите уравнение $\sin 2x + 2\sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4}\right) + 1 = 0$.

б) Найдите корни уравнения, принадлежащие отрезку $\left[-\frac{15\pi}{2}; -6\pi\right]$.

РЕШЕНИЕ

а) Воспользуемся формулами синуса двойного аргумента и косинуса разности:

$$2 \sin x \cos x + 2\sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) + 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x \cos x + 2 \cos x + 2 \sin x + 1 = 0.$$

Теперь, заменив единицу на $\sin^2 x + \cos^2 x$, получим:

$$2 \sin x \cos x + 2 \cos x + 2 \sin x + \sin^2 x + \cos^2 x = 0 \Leftrightarrow (\sin x + \cos x)^2 + 2(\sin x + \cos x) = 0.$$

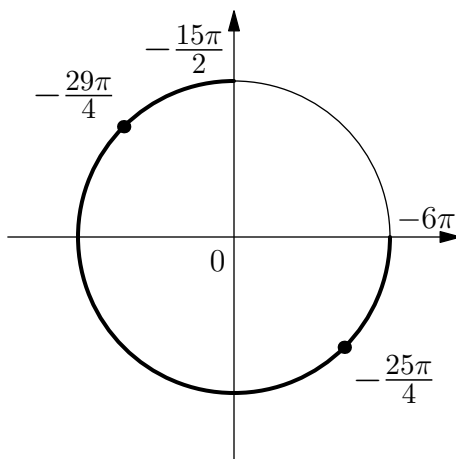
Последнее уравнение приводится к виду

$$(\sin x + \cos x)(\sin x + \cos x + 2) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sin x + \cos x = 0, \\ \sin x + \cos x = -2. \end{cases}$$

Первое уравнение совокупности эквивалентно $\operatorname{tg} x = -1$, откуда $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Второе уравнение приводится к виду $\sin \left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$ и не имеет решений.

б) Отберем корни с помощью тригонометрической окружности.



Получим:

$$x_1 = -\frac{15\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = -\frac{29\pi}{4},$$

$$x_2 = -6\pi - \frac{\pi}{4} = -\frac{25\pi}{4}.$$

ОТВЕТ: а) $-\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{29\pi}{4}$, $-\frac{25\pi}{4}$.